

**КАЗАНСКИЙ ФЕДЕРАЛЬНЫЙ УНИВЕРСИТЕТ**  
**ИНСТИТУТ ЭКОНОМИКИ И ФИНАНСОВ**  
**Кафедра математики и экономической информатики**

**Учебно-методическое пособие**  
**по дисциплине «Линейная алгебра»**  
**для контроля самостоятельной работы**  
**студентов, обучающихся по направлению**  
**080100.62 «Экономика» и по направлению**  
**080100.62 «Экономика»**  
**с сокращенным сроком обучения**

**Казань 2012**

**Составители:**

зав. кафедрой, профессор **Марданов Р.Ш.**,

к.ф.-м.н., доцент **Хасанова А.Ю.**,

к.ф.-м.н., доцент **Фатыхов А.Г.**,

к.ф.-м.н., доцент **Романова Е.М.**

**Рецензент:**

к.ф.-м.н., доцент **Султанов Р.А.**

Обсуждена на заседании кафедры математики и экономической информатики  
2.06.2011, протокол № 10.

Утверждена Учебно-методической комиссией института 2.07.2012, протокол  
№ 7.

## **Введение**

Данное учебно-методическое пособие включает упражнения и задания для закрепления знаний, полученных на лекционных и практических занятиях при самостоятельном изучении, и способствует системному изучению дисциплины «Линейная алгебра».

Учебно-методическое пособие составлено в соответствии с программой курса «Линейная алгебра» и календарно-тематическим планом.

По каждой теме приводятся 30 вариантов заданий. Контроль знаний осуществляется путем проверки письменной работы и оценки по балльно-рейтинговой системе.

## Работа № 1

**Тема 1. Определители и его свойства. Метод Крамера решения систем линейных уравнений.**

**Тема 2. Матрицы и действия над ними. Матричный способ решения систем линейных уравнений.**

Задание 1. Вычислить определитель двумя способами.

Варианты заданий:

$$1. \begin{vmatrix} 1 & 0 & 2 & -3 \\ -2 & 1 & 1 & 3 \\ 3 & -1 & 2 & -2 \\ 1 & -3 & 1 & 4 \end{vmatrix}.$$

$$2. \begin{vmatrix} 3 & -1 & 1 & 2 \\ 0 & -2 & 4 & -3 \\ 1 & 1 & -2 & 4 \\ 9 & 2 & 3 & 1 \end{vmatrix}.$$

$$3. \begin{vmatrix} 2 & 4 & -1 & 1 \\ -3 & 0 & 1 & -2 \\ 5 & 3 & -4 & 1 \\ 2 & -6 & 2 & 7 \end{vmatrix}.$$

$$4. \begin{vmatrix} 5 & -2 & 1 & 3 \\ -1 & 3 & 0 & 4 \\ -2 & 6 & 2 & -3 \\ 1 & 3 & 2 & 2 \end{vmatrix}.$$

$$5. \begin{vmatrix} -1 & 3 & 2 & 1 \\ 4 & -2 & 1 & 0 \\ 5 & -3 & 4 & 2 \\ 6 & 7 & -2 & -4 \end{vmatrix}.$$

$$6. \begin{vmatrix} 2 & -4 & 7 & 1 \\ 3 & -5 & 2 & -6 \\ 0 & 2 & 3 & -4 \\ 1 & -3 & 2 & 4 \end{vmatrix}.$$

$$7. \begin{vmatrix} 1 & 3 & -2 & 5 \\ 3 & -3 & 4 & 2 \\ -1 & 0 & 1 & -4 \\ 2 & 6 & 1 & 2 \end{vmatrix}.$$

$$8. \begin{vmatrix} 2 & 1 & 3 & 6 \\ -1 & 4 & 5 & 2 \\ 3 & -1 & 0 & -2 \\ 4 & 4 & 7 & 1 \end{vmatrix}.$$

$$9. \begin{vmatrix} 3 & -4 & 2 & -2 \\ 2 & 5 & -3 & 1 \\ 9 & -7 & 1 & 0 \\ -8 & 5 & -3 & 3 \end{vmatrix}.$$

$$10. \begin{vmatrix} -2 & 9 & 1 & 7 \\ -1 & 3 & 4 & 6 \\ 3 & -5 & 2 & 1 \\ 0 & -3 & 5 & 4 \end{vmatrix}.$$

$$11. \begin{vmatrix} 4 & 5 & 2 & 3 \\ -1 & 3 & -2 & -5 \\ 3 & 8 & 0 & -2 \\ 1 & -4 & 4 & 7 \end{vmatrix}.$$

$$12. \begin{vmatrix} 1 & 3 & -5 & -3 \\ 2 & -4 & 1 & -2 \\ -3 & 5 & 2 & 4 \\ 2 & 0 & 3 & 1 \end{vmatrix}.$$

$$13. \begin{vmatrix} 3 & 7 & -1 & 3 \\ 4 & 5 & 3 & -2 \\ -1 & 2 & -4 & 6 \\ 1 & 4 & 0 & 3 \end{vmatrix}.$$

$$14. \begin{vmatrix} 5 & -3 & 2 & 4 \\ 4 & 1 & 3 & 3 \\ 6 & -1 & 4 & 5 \\ 2 & 1 & -4 & 0 \end{vmatrix}.$$

$$15. \begin{vmatrix} -4 & 3 & 1 & 3 \\ 6 & -2 & 0 & -1 \\ 2 & 7 & -3 & 4 \\ 3 & 4 & -2 & 2 \end{vmatrix}.$$

$$16. \begin{vmatrix} 6 & -2 & 5 & -3 \\ -5 & 3 & -4 & 2 \\ 2 & 1 & 0 & 4 \\ 2 & 9 & -1 & 3 \end{vmatrix}.$$

$$17. \begin{vmatrix} -1 & 9 & 0 & 4 \\ -2 & -3 & 3 & 2 \\ -4 & 1 & -2 & 3 \\ -5 & 4 & 1 & 6 \end{vmatrix}.$$

$$18. \begin{vmatrix} 4 & 2 & 6 & 4 \\ 3 & 1 & -2 & 0 \\ -1 & -3 & 4 & 5 \\ 8 & 3 & -1 & 2 \end{vmatrix}.$$

$$19. \begin{vmatrix} -2 & 3 & 4 & -1 \\ 0 & 5 & 5 & 2 \\ 4 & -7 & -6 & 3 \\ 8 & -9 & -15 & 4 \end{vmatrix}.$$

$$20. \begin{vmatrix} 2 & 0 & 3 & 8 \\ 1 & -2 & 2 & 3 \\ 4 & -1 & 3 & -2 \\ 2 & 3 & 1 & 2 \end{vmatrix}.$$

$$21. \begin{vmatrix} -1 & 2 & 0 & 3 \\ 2 & 5 & 3 & -4 \\ -5 & 1 & -6 & 2 \\ 4 & -3 & 5 & 1 \end{vmatrix}.$$

$$22. \begin{vmatrix} 0 & -2 & 1 & 3 \\ 3 & 1 & 2 & -1 \\ 4 & -3 & 5 & 6 \\ 7 & 2 & 3 & -4 \end{vmatrix}.$$

$$23. \begin{vmatrix} -5 & 2 & 3 & -4 \\ 9 & -3 & 1 & 5 \\ -2 & 4 & 0 & 3 \\ 3 & -1 & 2 & 1 \end{vmatrix}.$$

$$24. \begin{vmatrix} 2 & 3 & -5 & 4 \\ -3 & 1 & -4 & -2 \\ 6 & 4 & 2 & 0 \\ 3 & -2 & 1 & 8 \end{vmatrix}.$$

$$25. \begin{vmatrix} -4 & 2 & 4 & 1 \\ 6 & -1 & 4 & 3 \\ -2 & 3 & 1 & 2 \\ 0 & 4 & -3 & 3 \end{vmatrix}.$$

$$26. \begin{vmatrix} 1 & -4 & 3 & 2 \\ 4 & -3 & -2 & 1 \\ 2 & -1 & 4 & 5 \\ 6 & 0 & -2 & 4 \end{vmatrix}.$$

$$27. \begin{vmatrix} 9 & -2 & 4 & 3 \\ 1 & 5 & 3 & 2 \\ 5 & -3 & 4 & -1 \\ 7 & -2 & 6 & 0 \end{vmatrix}.$$

$$28. \begin{vmatrix} 7 & -6 & 2 & 3 \\ 4 & 0 & -4 & 2 \\ -3 & 5 & -2 & 1 \\ -1 & 2 & 3 & 4 \end{vmatrix}.$$

$$29. \begin{vmatrix} 3 & 2 & -3 & 1 \\ -1 & 3 & -2 & 5 \\ 3 & 6 & 0 & 9 \\ -2 & 2 & 3 & 6 \end{vmatrix}.$$

$$30. \begin{vmatrix} -2 & 4 & 3 & 5 \\ 2 & 2 & 1 & -1 \\ 3 & 0 & 5 & -2 \\ 7 & 8 & 3 & -4 \end{vmatrix}.$$

Задание 2. Найти матрицу, обратную к матрице А, и выполнить проверку.

Варианты заданий:

$$1. A = \begin{pmatrix} 2 & -3 & 1 \\ -1 & 4 & 2 \\ 6 & -15 & -2 \end{pmatrix}.$$

$$2. A = \begin{pmatrix} 4 & 2 & 4 \\ -5 & 4 & 1 \\ 7 & -2 & 2 \end{pmatrix}.$$

$$3. A = \begin{pmatrix} -3 & -2 & 5 \\ 6 & 4 & -5 \\ 2 & 1 & 2 \end{pmatrix}.$$

$$4. A = \begin{pmatrix} -1 & 3 & -5 \\ 2 & 3 & 4 \\ 3 & -2 & 10 \end{pmatrix}.$$

$$5. A = \begin{pmatrix} 4 & -5 & 5 \\ -3 & 2 & 9 \\ -4 & 4 & 2 \end{pmatrix}.$$

$$6. A = \begin{pmatrix} -3 & 5 & -3 \\ 2 & 1 & 6 \\ -5 & 6 & -7 \end{pmatrix}.$$

$$7. A = \begin{pmatrix} 5 & -1 & 3 \\ -4 & 5 & -3 \\ 6 & -5 & 4 \end{pmatrix}.$$

$$8. A = \begin{pmatrix} 1 & 4 & -7 \\ 2 & -3 & 9 \\ 4 & 2 & 2 \end{pmatrix}.$$

$$9. A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 3 & -2 & 1 \\ 2 & 1 & 2 \end{pmatrix}.$$

$$10. A = \begin{pmatrix} 3 & -2 & 1 \\ 2 & 1 & 2 \\ 1 & 3 & 4 \end{pmatrix}.$$

$$11. A = \begin{pmatrix} 8 & 3 & 1 \\ -2 & 4 & 3 \\ 1 & -3 & -2 \end{pmatrix}.$$

$$12. A = \begin{pmatrix} 4 & -1 & -2 \\ 3 & 2 & 1 \\ 5 & 3 & 1 \end{pmatrix}.$$

$$13. A = \begin{pmatrix} -5 & 2 & 3 \\ -4 & 1 & 2 \\ 3 & 2 & 4 \end{pmatrix}.$$

$$14. A = \begin{pmatrix} -1 & -3 & 2 \\ 4 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 4 \end{pmatrix}.$$

$$15. A = \begin{pmatrix} -2 & -3 & 4 \\ 3 & 5 & 1 \\ 2 & 3 & 2 \end{pmatrix}.$$

$$16. A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & -4 \\ 2 & 5 & -2 \\ 1 & 3 & 2 \end{pmatrix}.$$

$$17. A = \begin{pmatrix} 6 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 1 \\ -2 & 1 & -2 \end{pmatrix}.$$

$$18. A = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 4 \\ 2 & 1 & 3 \\ -3 & 2 & -5 \end{pmatrix}.$$

$$19. A = \begin{pmatrix} 4 & 2 & 6 \\ -3 & 1 & -2 \\ 2 & 1 & 5 \end{pmatrix}.$$

$$20. A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 5 \\ 3 & -1 & 2 \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix}.$$

$$21. A = \begin{pmatrix} 3 & 2 & -5 \\ 2 & 1 & -2 \\ 4 & 3 & 4 \end{pmatrix}.$$

$$22. A = \begin{pmatrix} 4 & 1 & 3 \\ -3 & 2 & 4 \\ 5 & -2 & -3 \end{pmatrix}.$$

$$23. A = \begin{pmatrix} 5 & 1 & 3 \\ 2 & 2 & -1 \\ -4 & -3 & 2 \end{pmatrix}.$$

$$24. A = \begin{pmatrix} -7 & -2 & 3 \\ 3 & 1 & 4 \\ 4 & 1 & 2 \end{pmatrix}.$$

$$25. A = \begin{pmatrix} -3 & 3 & 2 \\ 4 & -2 & -1 \\ 5 & 2 & 2 \end{pmatrix}.$$

$$26. A = \begin{pmatrix} 6 & 3 & 2 \\ 3 & 2 & 1 \\ 5 & -3 & 2 \end{pmatrix}.$$

$$27. A = \begin{pmatrix} 1 & 4 & -2 \\ 1 & 3 & 1 \\ 3 & 4 & -2 \end{pmatrix}.$$

$$28. A = \begin{pmatrix} 3 & 4 & 5 \\ -2 & -1 & 2 \\ 2 & 3 & 6 \end{pmatrix}.$$

$$29. A = \begin{pmatrix} 5 & 4 & 2 \\ 2 & 1 & -3 \\ 3 & 2 & -4 \end{pmatrix}.$$

$$30. A = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 4 \\ -1 & 1 & -5 \\ 2 & 3 & 6 \end{pmatrix}.$$



### Рекомендуемая литература

1. Математика для экономических специальностей вузов. Ч.3 / Под ред. Р.Ш. Марданова.- Казань: Изд-во КГУ, 2007, с. 5 -22.
2. Сборник задач по математике для экономистов: учебное пособие для экономических специальностей вузов./ Р. Ш. Марданов, А. Ю. Хасанова, Р. А. Султанов, А. Г. Фатыхов; под научной редакцией проф. Р. Ш. Марданова.- Казань: Казан. Гос. Ун.-т, 2009, с.319 - 339.

### Работа № 2

#### Тема 3. Модель Леонтьева. Модель равновесных цен

Задача. Дан межотраслевой баланс трехотраслевой модели хозяйства:

	№ отрасли потребления	1	2	3	Конечный продукт	Валовый продукт	$y'$
№ отрасли производства	1	$x_{11}$	$x_{12}$	$x_{13}$	$y_1$	$x_1$	$y'_1$
	2	$x_{21}$	$x_{22}$	$x_{23}$	$y_2$	$x_2$	$y'_2$
	3	$x_{31}$	$x_{32}$	$x_{33}$	$y_3$	$x_3$	$y'_3$

Определить:

- 1) технологическую матрицу;
- 2) матрицу коэффициентов полных затрат;
- 3) валовой выпуск  $X'$  на новый ассортимент конечной продукции  $y'$ .

Дать экономический анализ каждого столбца матрицы коэффициентов полных затрат.

Варианты заданий:

1.	№ отрасли потребления	1	2	3	Конечный продукт	Валовый продукт	$y'$
№ отрасли производства	1	80	180	40	100	400	120
	2	80	300	120	100	600	150
	3	120	120	80	80	400	100

2.	№ отрасли потребления	1	2	3	Конечный продукт	Валовый продукт	у'
№ отрасли производства	1	54	40	34	52	180	70
	2	72	60	17	51	200	80
	3	36	40	34	60	170	90

3.	№ отрасли потребления	1	2	3	Конечный продукт	Валовый продукт	у'
№ отрасли производства	1	10	24	42	24	100	50
	2	50	48	56	86	240	100
	3	0	96	28	16	140	50

4.	№ отрасли потребления	1	2	3	Конечный продукт	Валовый продукт	у'
№ отрасли производства	1	20	20	60	100	200	150
	2	20	40	60	80	200	100
	3	20	0	10	70	100	100

5.	№ отрасли потребления	1	2	3	Конечный продукт	Валовый продукт	у'
№ отрасли производства	1	90	27	135	48	300	50
	2	90	54	45	81	270	80
	3	60	81	90	219	450	220

6.	№ отрасли потребления	1	2	3	Конечный продукт	Валовый продукт	у'
№ отрасли производства	1	48	40	32	40	160	120
	2	16	40	64	80	200	100
	3	64	60	96	100	320	120

7.	№ отрасли потребления	1	2	3	Конечный продукт	Валовый продукт	у'
№ отрасли производства	1	60	60	70	110	300	120
	2	30	80	35	55	200	100
	3	30	40	35	245	350	200

8.	№ отрасли потребления	1	2	3	Конечный продукт	Валовый продукт	у'
№ отрасли производства	1	40	50	30	80	200	100
	2	60	50	60	80	250	100
	3	40	50	90	120	300	150

9.	№ отрасли потребления	1	2	3	Конечный продукт	Валовый продукт	у'
№ отрасли производства	1	120	50	30	200	400	150
	2	80	25	30	115	250	120
	3	80	75	90	55	300	80

10.	№ отрасли потребления	1	2	3	Конечный продукт	Валовый продукт	у'
№ отрасли производства	1	36	24	20	40	120	60
	2	48	72	60	60	240	100
	3	72	48	20	60	200	100

11.	№ отрасли потребления	1	2	3	Конечный продукт	Валовый продукт	у'
№ отрасли производства	1	60	120	80	40	300	80
	2	30	80	60	230	400	100
	3	0	40	40	120	200	120

12.	№ отрасли потребления	1	2	3	Конечный продукт	Валовый продукт	$y'$
№ отрасли производства	1	30	0	16	54	100	50
	2	40	36	32	12	120	20
	3	10	24	48	78	160	90

13.	№ отрасли потребления	1	2	3	Конечный продукт	Валовый продукт	$y'$
№ отрасли производства	1	30	40	90	140	300	100
	2	0	20	60	120	200	150
	3	90	40	30	140	300	150

14.	№ отрасли потребления	1	2	3	Конечный продукт	Валовый продукт	$y'$
№ отрасли производства	1	0	36	60	64	160	60
	2	48	24	20	28	120	40
	3	32	12	80	76	200	100

15.	№ отрасли потребления	1	2	3	Конечный продукт	Валовый продукт	$y'$
№ отрасли производства	1	45	15	25	215	300	150
	2	36	60	0	54	150	100
	3	60	30	75	85	250	100

16.	№ отрасли потребления	1	2	3	Конечный продукт	Валовый продукт	$y'$
№ отрасли производства	1	36	0	20	64	120	60
	2	48	54	40	38	180	50
	3	12	36	60	92	200	100

17.	№ отрасли потребления	1	2	3	Конечный продукт	Валовый продукт	$y'$
№ отрасли производства	1	30	75	30	15	150	40
	2	45	25	60	120	250	100
	3	15	100	90	95	300	100

18.	№ отрасли потребления	1	2	3	Конечный продукт	Валовый продукт	$y'$
№ отрасли производства	1	75	30	40	105	250	300
	2	50	120	0	130	300	250
	3	100	60	120	120	400	500

19.	№ отрасли потребления	1	2	3	Конечный продукт	Валовый продукт	$y'$
№ отрасли производства	1	40	25	105	30	200	50
	2	0	50	35	165	250	180
	3	60	25	70	195	350	150

20.	№ отрасли потребления	1	2	3	Конечный продукт	Валовый продукт	$y'$
№ отрасли производства	1	60	45	120	75	300	100
	2	0	90	40	320	450	300
	3	90	45	80	185	400	200

21.	№ отрасли потребления	1	2	3	Конечный продукт	Валовый продукт	$y'$
№ отрасли производства	1	45	0	60	45	150	60
	2	30	40	30	300	400	200
	3	15	80	90	115	300	100

22.	№ отрасли потребления	1	2	3	Конечный продукт	Валовый продукт	$y'$
№ отрасли производства	1	50	120	60	270	500	250
	2	100	40	90	170	400	150
	3	150	80	30	40	300	100

23.	№ отрасли потребления	1	2	3	Конечный продукт	Валовый продукт	$y'$
№ отрасли производства	1	75	0	30	145	250	150
	2	100	135	60	155	450	160
	3	25	90	90	95	300	100

24.	№ отрасли потребления	1	2	3	Конечный продукт	Валовый продукт	$y'$
№ отрасли производства	1	60	60	60	20	200	50
	2	20	90	30	160	300	200
	3	20	120	120	40	300	80

25.	№ отрасли потребления	1	2	3	Конечный продукт	Валовый продукт	$y'$
№ отрасли производства	1	42	52	40	6	140	20
	2	14	78	20	148	260	100
	3	0	104	80	16	200	30

26.	№ отрасли потребления	1	2	3	Конечный продукт	Валовый продукт	$y'$
№ отрасли производства	1	15	25	90	20	150	50
	2	45	50	120	35	250	60
	3	30	75	30	165	300	100

27.	№ отрасли потребления	1	2	3	Конечный продукт	Валовый продукт	у'
№ отрасли производства	1	72	64	20	204	360	150
	2	108	16	10	26	160	50
	3	36	48	0	16	100	30

28.	№ отрасли потребления	1	2	3	Конечный продукт	Валовый продукт	у'
№ отрасли производства	1	40	0	100	260	400	150
	2	80	60	50	10	200	50
	3	120	20	100	10	250	50

29.	№ отрасли потребления	1	2	3	Конечный продукт	Валовый продукт	у'
№ отрасли производства	1	36	72	0	252	360	250
	2	72	96	60	12	240	20
	3	108	24	40	28	200	40

30.	№ отрасли потребления	1	2	3	Конечный продукт	Валовый продукт	у'
№ отрасли производства	1	30	60	60	150	300	200
	2	30	0	30	140	200	150
	3	60	40	45	5	150	70

### ***Рекомендуемая литература***

1. Математика для экономических специальностей вузов. Ч.3 / Под ред. Р.Ш. Марданова.- Казань: Изд-во КГУ, 2007, с. 26-29.
2. Сборник задач по математике для экономистов: учебное пособие для экономических специальностей вузов./ Р. Ш. Марданов, А. Ю. Хасанова, Р. А. Султанов, А. Г. Фатыхов; под научной редакцией проф. Р. Ш. Марданова.- Казань: Казан. Гос. Ун.-т, 2009, с.339-344.

### Работа № 3

#### Тема 11. Опорные решения систем линейных уравнений

Задания:

1. Найти общее, базисное и частное решения системы линейных уравнений.
2. Найти 2 опорных решения системы линейных уравнений, для одного из них записать общее и найти допустимое решение.

Варианты заданий:

$$1. \begin{cases} x_1 + 2x_2 + 5x_3 + 3x_4 + 2x_5 = 4, \\ 2x_1 + x_2 + 3x_3 + 4x_4 + 6x_5 = 6, \\ -x_1 + 7x_2 + 16x_3 + 3x_4 - 8x_5 = 2. \end{cases} \quad 2. \begin{cases} 2x_1 + 3x_3 + 5x_4 - 4x_5 = 1, \\ 3x_1 + 2x_2 + x_3 + 3x_5 = 3, \\ x_1 - 2x_2 + x_3 + 10x_4 - 11x_5 = -1. \end{cases}$$

$$3. \begin{cases} 3x_1 - x_2 + 5x_3 + 4x_4 + 2x_5 = 6, \\ 2x_1 + 2x_2 + 3x_3 - x_4 + x_5 = 9, \\ x_1 - 3x_2 + 4x_3 - 2x_4 + 3x_5 = 1. \end{cases} \quad 4. \begin{cases} 2x_1 - x_2 + x_3 + 5x_4 - 3x_5 = 4, \\ x_1 - 3x_2 + 2x_3 + 4x_4 + x_5 = 3, \\ 3x_1 + 2x_2 - x_3 - 3x_4 + 2x_5 = 3. \end{cases}$$

$$5. \begin{cases} 2x_1 + x_2 + 3x_3 - 5x_4 + 4x_5 = 4, \\ 3x_1 + x_2 + 4x_3 + x_4 - 3x_5 = 5, \\ x_1 + 2x_2 + x_3 + 3x_4 - 2x_5 = 5. \end{cases} \quad 6. \begin{cases} 2x_1 + 3x_2 - x_3 - x_4 + 3x_5 = 8, \\ x_1 - 2x_2 + 3x_3 + x_4 - 2x_5 = 3, \\ 3x_1 + x_2 + 2x_3 + x_5 = 11. \end{cases}$$

$$7. \begin{cases} 3x_1 - x_2 + x_3 + 2x_4 + 5x_5 = -1, \\ x_1 + 4x_2 - x_3 + x_4 + 3x_5 = 10, \\ 4x_1 + 3x_2 + 3x_4 + 8x_5 = 9. \end{cases} \quad 8. \begin{cases} x_1 + 4x_2 + 3x_3 - 4x_4 + x_5 = 3, \\ -2x_1 + 3x_2 - x_3 + 5x_4 + 2x_5 = 2, \\ 11x_2 + 4x_3 - 3x_4 + 4x_5 = 8. \end{cases}$$

$$9. \begin{cases} 7x_1 - 2x_2 - x_3 + 3x_4 + 4x_5 = 8, \\ -x_1 + 4x_2 + 3x_3 - 5x_4 - 6x_5 = 2, \\ 4x_1 - 3x_2 - 2x_3 + 4x_4 + 5x_5 = 3. \end{cases} \quad 10. \begin{cases} x_1 + 2x_2 + x_3 - x_4 + x_5 = 2, \\ -2x_1 + x_2 - x_3 + 2x_4 + 2x_5 = 3, \\ 3x_1 + 2x_2 + x_3 - x_4 + 3x_5 = 4. \end{cases}$$

$$11. \begin{cases} -x_1 - 2x_2 + 3x_3 + 4x_4 + 4x_5 = 8, \\ 3x_1 + 7x_2 + 5x_3 + 5x_4 - 10x_5 = 11, \\ 4x_1 + 9x_2 + 2x_3 + x_4 - 14x_5 = 3. \end{cases} \quad 12. \begin{cases} 5x_1 + 8x_2 + x_3 + x_4 - 10x_5 = 2, \\ -x_1 + 12x_2 + 7x_3 - 3x_4 + 2x_5 = 0, \\ 2x_1 - 2x_2 - 3x_3 + 2x_4 - 6x_5 = 1. \end{cases}$$



$$13. \begin{cases} 7x_1 - 6x_2 + 2x_3 - 3x_4 + 3x_5 = 8, \\ x_1 + 6x_2 + 8x_3 - 15x_4 - 3x_5 = 2, \\ x_1 - 2x_2 - x_3 + 2x_4 + x_5 = 1. \end{cases}$$

$$14. \begin{cases} 4x_1 + x_2 + 3x_3 + 8x_5 = 1, \\ -2x_1 + 2x_2 - x_3 + 2x_4 + 3x_5 = 3, \\ 5x_2 + x_3 + 4x_4 - 2x_5 = 7. \end{cases}$$

$$15. \begin{cases} 3x_1 + 2x_2 + x_3 - x_4 + x_5 = 2, \\ -x_1 - 11x_2 - 3x_3 + 6x_4 + 3x_5 = 3, \\ 8x_1 - 5x_2 + 3x_4 + 6x_5 = 9. \end{cases}$$

$$16. \begin{cases} 2x_1 + 3x_2 + 4x_3 + x_4 - 2x_5 = 16, \\ x_1 + x_2 + 2x_3 - x_4 + x_5 = 7, \\ 4x_1 + 2x_2 + 5x_3 + 2x_4 + x_5 = 15. \end{cases}$$

$$17. \begin{cases} 3x_1 - 2x_2 + 3x_3 - x_4 - 3x_5 = 10, \\ x_1 + 2x_2 - 4x_3 + 2x_4 + x_5 = -10, \\ x_1 - x_2 + x_3 + 3x_4 + 2x_5 = -5. \end{cases}$$

$$18. \begin{cases} 2x_1 + 3x_2 + 4x_3 - x_4 - 2x_5 = 12, \\ x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + 2x_5 = 5, \\ x_1 + 2x_2 + 3x_3 - 2x_4 - 4x_5 = 7. \end{cases}$$

$$19. \begin{cases} 3x_1 - 2x_2 + 3x_3 + x_4 = 10, \\ 2x_1 + x_2 - 2x_3 + 3x_4 + 3x_5 = 1, \\ x_1 - x_2 - x_3 + x_4 + 2x_5 = -2. \end{cases}$$

$$20. \begin{cases} 3x_1 - 4x_2 - 5x_3 + 5x_4 + 5x_5 = 12, \\ x_1 - 3x_2 - 4x_3 + 3x_4 + 4x_5 = 5, \\ x_1 + 2x_2 + 3x_3 - x_4 - 3x_5 = 2. \end{cases}$$

$$21. \begin{cases} x_1 + 2x_2 - 3x_3 - x_5 = 0, \\ 3x_1 - x_2 + 2x_3 + 3x_4 + 3x_5 = 4, \\ 2x_1 + 2x_2 + 4x_3 - 5x_4 - 3x_5 = 8 \end{cases}$$

$$22. \begin{cases} 2x_1 + 3x_2 + x_3 - 7x_4 - x_5 = 12, \\ x_1 - x_2 + x_3 + 3x_4 + x_5 = 0, \\ 3x_1 + x_2 - x_3 - 2x_4 + 3x_5 = 2 \end{cases}$$

$$23. \begin{cases} 3x_1 - 2x_2 - 4x_3 + x_4 + 5x_5 = 3, \\ 2x_1 + 4x_2 + 7x_3 - 2x_4 - x_5 = 17, \\ x_1 + x_2 - 2x_3 + 3x_4 - 2x_5 = 2. \end{cases}$$

$$24. \begin{cases} 6x_1 - x_2 - 2x_3 + x_4 + 2x_5 = 1, \\ 4x_1 + 2x_2 - 3x_3 + 2x_4 + 3x_5 = 0, \\ 5x_1 - x_2 + 4x_3 - 2x_4 + x_5 = 12. \end{cases}$$

$$25. \begin{cases} -x_1 + 2x_2 + 3x_3 - x_4 + 2x_5 = 6, \\ 2x_1 - x_2 + 4x_3 + 2x_4 + 3x_5 = 11, \\ 3x_1 + 4x_2 - x_3 - x_4 - 2x_5 = 8. \end{cases}$$

$$26. \begin{cases} 4x_1 + 2x_2 - x_3 + x_4 + x_5 = 6, \\ 3x_1 - x_2 + 4x_3 + x_4 - 2x_5 = 2, \\ 2x_1 + 3x_2 - 3x_3 + x_4 + 2x_5 = 5. \end{cases}$$

$$27. \begin{cases} 2x_1 + x_2 - x_3 + 2x_4 + 3x_5 = 2, \\ x_1 + 2x_2 + x_3 - x_4 + x_5 = 10, \\ -x_1 + x_2 + 2x_3 - 3x_4 - 2x_5 = 8 \end{cases}$$

$$28. \begin{cases} x_1 + 2x_2 + 3x_3 - x_4 + x_5 = 6, \\ 2x_1 + x_2 - x_3 + x_4 - x_5 = -1, \\ -x_1 + x_2 + 4x_3 - 2x_4 + 2x_5 = 7 \end{cases}$$

$$29. \begin{cases} 2x_1 + x_2 + x_3 - 2x_4 + x_5 = 2, \\ 3x_1 - x_2 + x_3 + x_4 - 2x_5 = -6, \\ x_1 - 2x_2 + 3x_4 - 3x_5 = -8. \end{cases}$$

$$30. \begin{cases} 4x_1 - 5x_2 + 3x_3 + x_4 + 2x_5 = 4, \\ -3x_1 + x_2 + 4x_3 + x_4 + 3x_5 = 5, \\ -2x_1 + 3x_2 + x_3 + 2x_4 + x_5 = 5. \end{cases}$$

### **Рекомендуемая литература**

1. Математика для экономических специальностей вузов. Ч.3 / Под ред. Р.Ш. Марданова.- Казань: Изд-во КГУ, 2007, с. 77-112.
2. Сборник задач по математике для экономистов: учебное пособие для экономических специальностей вузов./ Р. Ш. Марданов, А. Ю. Хасанова, Р. А. Султанов, А. Г. Фатыхов; под научной редакцией проф. Р. Ш. Марданова.- Казань: Казан. Гос. Ун.-т, 2009, с.377-386.

### **Работа № 4**

#### **Тема 13. Симплексный метод решения задачи линейного программирования**

Задача. Для производства трех видов продукции  $P_1$ ,  $P_2$ ,  $P_3$  предприятие использует три вида сырья  $S_1$ ,  $S_2$ ,  $S_3$ . Нормы расхода сырья на производство единицы продукции каждого вида, общее количество сырья данного вида и прибыль от реализации единицы продукции приведены в таблице

Вид сырья	Нормы расхода сырья (кг) на производство ед.продукции			Запасы сырья (кг)
	$P_1$	$P_2$	$P_3$	
$S_1$	$a_{11}$	$a_{12}$	$a_{13}$	$b_1$
$S_2$	$a_{21}$	$a_{22}$	$a_{23}$	$b_2$
$S_3$	$a_{31}$	$a_{32}$	$a_{33}$	$b_3$
Прибыль(ус.ед.)	$C_1$	$C_2$	$C_3$	

Определить оптимальный план выпуска продукции из условия максимизации прибыли, дать экономический анализ полученного оптимального решения.

Варианты заданий:

1.

Вид сырья	Нормы расхода сырья (кг) на производство ед.продукции			Запасы сырья (кг)
	P <sub>1</sub>	P <sub>2</sub>	P <sub>3</sub>	
S <sub>1</sub>	4	1	4	600
S <sub>2</sub>	3	1	6	420
S <sub>3</sub>	6	2	3	480
Прибыль (ус.ед.)	30	20	10	

2.

Вид сырья	Нормы расхода сырья (кг) на производство ед.продукции			Запасы сырья (кг)
	P <sub>1</sub>	P <sub>2</sub>	P <sub>3</sub>	
S <sub>1</sub>	2	1	2	720
S <sub>2</sub>	3	0	5	300
S <sub>3</sub>	5	4	3	600
Прибыль (ус.ед.)	40	20	30	

3.

Вид сырья	Нормы расхода сырья (кг) на производство ед.продукции			Запасы сырья (кг)
	P <sub>1</sub>	P <sub>2</sub>	P <sub>3</sub>	
S <sub>1</sub>	3	4	6	1200
S <sub>2</sub>	2	0	2	400
S <sub>3</sub>	2	2	4	600
Прибыль (ус.ед.)	80	60	40	

4.

Вид сырья	Нормы расхода сырья (кг) на производство ед.продукции			Запасы сырья (кг)
	P <sub>1</sub>	P <sub>2</sub>	P <sub>3</sub>	
S <sub>1</sub>	4	2	4	800
S <sub>2</sub>	5	2	1	600
S <sub>3</sub>	2	6	4	1000
Прибыль (ус.ед.)	40	30	50	

5.

Вид сырья	Нормы расхода сырья (кг) на производство ед.продукции			Запасы сырья (кг)
	P <sub>1</sub>	P <sub>2</sub>	P <sub>3</sub>	
S <sub>1</sub>	1	6	2	1200
S <sub>2</sub>	2	3	1	1000
S <sub>3</sub>	0	4	1	800
Прибыль (ус.ед.)	60	40	80	

6.

Вид сырья	Нормы расхода сырья (кг) на производство ед.продукции			Запасы сырья (кг)
	P <sub>1</sub>	P <sub>2</sub>	P <sub>3</sub>	
S <sub>1</sub>	3	4	3	1200
S <sub>2</sub>	2	0	1	400
S <sub>3</sub>	2	2	2	600
Прибыль (ус.ед.)	80	60	40	

7.

Вид сырья	Нормы расхода сырья (кг) на производство ед.продукции			Запасы сырья (кг)
	P <sub>1</sub>	P <sub>2</sub>	P <sub>3</sub>	
S <sub>1</sub>	2	1	4	400
S <sub>2</sub>	1	0	2	280
S <sub>3</sub>	3	4	1	720
Прибыль (ус.ед.)	50	40	30	

8.

Вид сырья	Нормы расхода сырья (кг) на производство ед.продукции			Запасы сырья (кг)
	P <sub>1</sub>	P <sub>2</sub>	P <sub>3</sub>	
S <sub>1</sub>	2	2	4	1000
S <sub>2</sub>	2	0	4	800
S <sub>3</sub>	1	3	1	600
Прибыль (ус.ед.)	90	70	50	

9.	Вид сырья	Нормы расхода сырья (кг) на производство ед.продукции			Запасы сырья (кг)
		P <sub>1</sub>	P <sub>2</sub>	P <sub>3</sub>	
	S <sub>1</sub>	0	3	5	1500
	S <sub>2</sub>	1	1	0	1000
	S <sub>3</sub>	2	2	1	3600
	Прибыль (ус.ед.)	50	40	40	

10.	Вид сырья	Нормы расхода сырья (кг) на производство ед.продукции			Запасы сырья (кг)
		P <sub>1</sub>	P <sub>2</sub>	P <sub>3</sub>	
	S <sub>1</sub>	4	3	2	3000
	S <sub>2</sub>	0	2	1	1000
	S <sub>3</sub>	1	4	2	2200
	Прибыль (ус.ед.)	30	40	80	

11.	Вид сырья	Нормы расхода сырья (кг) на производство ед.продукции			Запасы сырья (кг)
		P <sub>1</sub>	P <sub>2</sub>	P <sub>3</sub>	
	S <sub>1</sub>	1	2	0	600
	S <sub>2</sub>	2	4	4	400
	S <sub>3</sub>	3	6	1	270
	Прибыль (ус.ед.)	30	20	40	

12.	Вид сырья	Нормы расхода сырья (кг) на производство ед.продукции			Запасы сырья (кг)
		P <sub>1</sub>	P <sub>2</sub>	P <sub>3</sub>	
	S <sub>1</sub>	3	0	4	840
	S <sub>2</sub>	2	1	3	600
	S <sub>3</sub>	2	4	6	400
	Прибыль (ус.ед.)	60	50	40	

13.	Вид сырья	Нормы расхода сырья (кг) на производство ед.продукции			Запасы сырья (кг)
		$P_1$	$P_2$	$P_3$	
	$S_1$	5	3	1	1400
	$S_2$	4	0	2	800
	$S_3$	2	2	4	720
	Прибыль (ус.ед.)	40	20	30	

14.	Вид сырья	Нормы расхода сырья (кг) на производство ед.продукции			Запасы сырья (кг)
		$P_1$	$P_2$	$P_3$	
	$S_1$	3	2	0	900
	$S_2$	2	1	5	640
	$S_3$	4	8	4	1000
	Прибыль (ус.ед.)	60	40	50	

15.	Вид сырья	Нормы расхода сырья (кг) на производство ед.продукции			Запасы сырья (кг)
		$P_1$	$P_2$	$P_3$	
	$S_1$	1	3	4	720
	$S_2$	4	2	3	400
	$S_3$	6	3	0	360
	Прибыль (ус.ед.)	30	50	20	

16.	Вид сырья	Нормы расхода сырья (кг) на производство ед.продукции			Запасы сырья (кг)
		$P_1$	$P_2$	$P_3$	
	$S_1$	1	0	2	700
	$S_2$	2	3	4	620
	$S_3$	4	2	6	560
	Прибыль (ус.ед.)	40	30	20	

17.	Вид сырья	Нормы расхода сырья (кг) на производство ед.продукции			Запасы сырья (кг)
		P <sub>1</sub>	P <sub>2</sub>	P <sub>3</sub>	
	S <sub>1</sub>	0	3	2	680
	S <sub>2</sub>	3	1	3	480
	S <sub>3</sub>	6	2	4	800
	Прибыль (ус.ед.)	10	20	30	

18.	Вид сырья	Нормы расхода сырья (кг) на производство ед.продукции			Запасы сырья (кг)
		P <sub>1</sub>	P <sub>2</sub>	P <sub>3</sub>	
	S <sub>1</sub>	3	3	2	390
	S <sub>2</sub>	2	4	0	380
	S <sub>3</sub>	1	3	1	280
	Прибыль (ус.ед.)	42	30	40	

19.	Вид сырья	Нормы расхода сырья (кг) на производство ед.продукции			Запасы сырья (кг)
		P <sub>1</sub>	P <sub>2</sub>	P <sub>3</sub>	
	S <sub>1</sub>	3	0	3	240
	S <sub>2</sub>	2	4	1	180
	S <sub>3</sub>	1	2	4	150
	Прибыль (ус.ед.)	20	16	10	

20.	Вид сырья	Нормы расхода сырья (кг) на производство ед.продукции			Запасы сырья (кг)
		P <sub>1</sub>	P <sub>2</sub>	P <sub>3</sub>	
	S <sub>1</sub>	2	4	6	300
	S <sub>2</sub>	3	2	3	360
	S <sub>3</sub>	4	3	0	320
	Прибыль (ус.ед.)	30	40	20	

21.

Вид сырья	Нормы расхода сырья (кг) на производство ед.продукции			Запасы сырья (кг)
	P <sub>1</sub>	P <sub>2</sub>	P <sub>3</sub>	
S <sub>1</sub>	4	0	4	1600
S <sub>2</sub>	2	3	4	1400
S <sub>3</sub>	3	6	5	1500
Прибыль (ус.ед.)	70	60	80	

22.

Вид сырья	Нормы расхода сырья (кг) на производство ед.продукции			Запасы сырья (кг)
	P <sub>1</sub>	P <sub>2</sub>	P <sub>3</sub>	
S <sub>1</sub>	3	6	6	840
S <sub>2</sub>	4	4	0	720
S <sub>3</sub>	2	1	4	680
Прибыль (ус.ед.)	50	40	30	

23.

Вид сырья	Нормы расхода сырья (кг) на производство ед.продукции			Запасы сырья (кг)
	P <sub>1</sub>	P <sub>2</sub>	P <sub>3</sub>	
S <sub>1</sub>	0	2	4	120
S <sub>2</sub>	4	1	3	80
S <sub>3</sub>	3	2	1	100
Прибыль (ус.ед.)	10	20	16	

24.

Вид сырья	Нормы расхода сырья (кг) на производство ед.продукции			Запасы сырья (кг)
	P <sub>1</sub>	P <sub>2</sub>	P <sub>3</sub>	
S <sub>1</sub>	2	1	3	180
S <sub>2</sub>	3	2	1	130
S <sub>3</sub>	0	6	4	160
Прибыль (ус.ед.)	12	18	24	



25.

Вид сырья	Нормы расхода сырья (кг) на производство ед.продукции			Запасы сырья (кг)
	P <sub>1</sub>	P <sub>2</sub>	P <sub>3</sub>	
S <sub>1</sub>	3	1	4	360
S <sub>2</sub>	2	0	3	300
S <sub>3</sub>	4	2	2	240
Прибыль (ус.ед.)	30	10	20	

26.

Вид сырья	Нормы расхода сырья (кг) на производство ед.продукции			Запасы сырья (кг)
	P <sub>1</sub>	P <sub>2</sub>	P <sub>3</sub>	
S <sub>1</sub>	2	4	3	540
S <sub>2</sub>	2	1	4	480
S <sub>3</sub>	1	3	0	360
Прибыль (ус.ед.)	24	18	16	

27.

Вид сырья	Нормы расхода сырья (кг) на производство ед.продукции			Запасы сырья (кг)
	P <sub>1</sub>	P <sub>2</sub>	P <sub>3</sub>	
S <sub>1</sub>	2	3	1	60
S <sub>2</sub>	1	2	4	80
S <sub>3</sub>	3	0	4	100
Прибыль (ус.ед.)	10	12	8	

28.

Вид сырья	Нормы расхода сырья (кг) на производство ед.продукции			Запасы сырья (кг)
	P <sub>1</sub>	P <sub>2</sub>	P <sub>3</sub>	
S <sub>1</sub>	1	3	2	120
S <sub>2</sub>	1	4	3	150
S <sub>3</sub>	2	0	2	180
Прибыль (ус.ед.)	16	12	14	

29.

Вид сырья	Нормы расхода сырья (кг) на производство ед.продукции			Запасы сырья (кг)
	$P_1$	$P_2$	$P_3$	
$S_1$	2	3	4	1200
$S_2$	0	3	2	1400
$S_3$	4	2	3	1500
Прибыль (ус.ед.)	60	40	80	

30.

Вид сырья	Нормы расхода сырья (кг) на производство ед.продукции			Запасы сырья (кг)
	$P_1$	$P_2$	$P_3$	
$S_1$	0	3	3	900
$S_2$	4	2	1	600
$S_3$	2	3	2	800
Прибыль (ус.ед.)	30	40	50	

### ***Рекомендуемая литература***

1. Математика для экономических специальностей вузов. Ч.3 / Под ред. Р.Ш. Марданова.- Казань: Изд-во КГУ, 2007, с. 114- 145.
2. Сборник задач по математике для экономистов: учебное пособие для экономических специальностей вузов./ Р. Ш. Марданов, А. Ю. Хасанова, Р. А. Султанов, А. Г. Фатыхов; под научной редакцией проф. Р. Ш. Марданова.- Казань: Казан. Гос. Ун.-т, 2009, с.389-408.

### **Работа № 5**

#### **Тема 14. Метод искусственного базиса**

Задание. Методом искусственного базиса решить задачу линейного программирования.

Варианты заданий:

1.  $Z = x_1 + 3x_2 + 2x_3 \quad (\max),$   

$$\begin{cases} 4x_1 + x_2 + 2x_3 \leq 320, \\ 2x_1 + x_2 + x_3 = 120, \\ 3x_1 + x_2 + 2x_3 \geq 220, \\ x_j \geq 0, j = \overline{1,3}; \end{cases}$$
2.  $Z = 4x_1 + x_2 + 2x_3 \quad (\max),$   

$$\begin{cases} x_1 + 4x_2 \leq 120, \\ 2x_1 + x_2 + x_3 \geq 60, \\ x_2 + 2x_3 = 80, \\ x_j \geq 0, j = \overline{1,3}; \end{cases}$$
3.  $Z = 12x_1 + 2x_2 + 4x_3 \quad (\max),$   

$$\begin{cases} x_1 + 2x_3 \leq 160, \\ 2x_1 + x_2 + 2x_3 \geq 120, \\ 2x_2 + x_3 = 160, \\ x_j \geq 0, j = \overline{1,3}; \end{cases}$$
4.  $Z = 3x_1 + 10x_2 + x_3 \quad (\max),$   

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 = 12, \\ x_1 + 6x_2 + 2x_3 \leq 80, \\ 2x_1 + x_2 + 4x_3 \geq 60, \\ x_j \geq 0, j = \overline{1,3}; \end{cases}$$
5.  $Z = 5x_1 + 2x_2 + 3x_3 \quad (\max),$   

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 = 40, \\ 2x_1 + 2x_2 + x_3 \leq 100, \\ 2x_2 - x_3 \geq 20, \\ x_j \geq 0, j = \overline{1,3}; \end{cases}$$
6.  $Z = 3x_1 + 6x_2 + x_3 \quad (\max),$   

$$\begin{cases} x_1 + 3x_2 + 5x_3 \leq 250, \\ 4x_1 + x_2 + x_3 \geq 200, \\ 3x_1 + 2x_2 + x_3 = 210, \\ x_j \geq 0, j = \overline{1,3}; \end{cases}$$
7.  $Z = 6x_1 + 4x_2 + 2x_3 \quad (\max),$   

$$\begin{cases} x_1 + 3x_2 + 5x_3 \leq 250, \\ 4x_1 + x_2 + x_3 \geq 200, \\ 3x_1 + 2x_2 + x_3 = 210, \\ x_j \geq 0, j = \overline{1,3}; \end{cases}$$
8.  $Z = 2x_1 + 3x_2 + x_3 \quad (\max),$   

$$\begin{cases} 5x_1 + 3x_2 + 2x_3 \leq 360, \\ 2x_1 + x_2 + x_3 = 160, \\ 3x_1 + 3x_2 + 2x_3 \geq 300, \\ x_j \geq 0, j = \overline{1,3}; \end{cases}$$
9.  $Z = x_1 + 2x_2 - x_3 \quad (\max),$   

$$\begin{cases} 2x_1 - x_2 + 2x_3 = 4, \\ x_1 + x_2 + 2x_3 \geq 36, \\ -x_1 + 4x_2 - 2x_3 \leq 60, \\ x_j \geq 0, j = \overline{1,3}; \end{cases}$$
10.  $Z = 3x_1 + 2x_2 + 2x_3 \quad (\max),$   

$$\begin{cases} x_1 + x_3 \leq 20, \\ x_1 + 2x_2 \geq 40, \\ x_1 + x_2 + x_3 = 30, \\ x_j \geq 0, j = \overline{1,3}; \end{cases}$$

$$11. \quad Z = 12x_1 + 5x_2 + 2x_3 \quad (\max), \quad 12. \quad Z = 6x_1 + 4x_2 + 2x_3 \quad (\max),$$

$$\begin{cases} 4x_1 + 10x_2 + 2x_3 \geq 40, \\ x_1 - 2x_2 = 60, \\ x_1 + 5x_2 + 2x_3 \geq 220, \end{cases} \quad \begin{cases} 2x_1 + 3x_2 + x_3 \leq 200, \\ x_1 + 2x_2 + x_3 = 160, \\ 2x_1 + x_2 + x_3 \geq 140, \end{cases}$$

$$x_j \geq 0, j = \overline{1,3}; \quad x_j \geq 0, j = \overline{1,3};$$

$$13. \quad Z = 12x_1 + x_2 + 5x_3 \quad (\max), \quad 14. \quad Z = 4x_1 + 6x_2 + 2x_3 \quad (\max),$$

$$\begin{cases} x_1 + x_3 \leq 200, \\ 4x_1 + x_2 + 3x_3 \geq 100, \\ 2x_2 + x_3 = 120, \end{cases} \quad \begin{cases} x_1 + x_2 = 10, \\ x_1 + 4x_2 + x_3 \leq 30, \\ 2x_1 + 6x_2 + x_3 \geq 33, \end{cases}$$

$$x_j \geq 0, j = \overline{1,3}; \quad x_j \geq 0, j = \overline{1,3};$$

$$15. \quad Z = 6x_1 + 5x_2 + x_3 \quad (\max), \quad 16. \quad Z = 10x_1 + 6x_2 + 2x_3 \quad (\max),$$

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 \leq 100, \\ 2x_1 + 3x_2 + x_3 \geq 50, \\ x_2 + 2x_3 = 60, \end{cases} \quad \begin{cases} x_1 + 3x_2 + 2x_3 \leq 160, \\ 4x_1 + 5x_2 \geq 40, \\ x_2 + 2x_3 = 60, \end{cases}$$

$$x_j \geq 0, j = \overline{1,3}; \quad x_j \geq 0, j = \overline{1,3};$$

$$17. \quad Z = 4x_1 + 7x_2 + 2x_3 \quad (\max), \quad 18. \quad Z = 5x_1 + x_2 + 3x_3 \quad (\max),$$

$$\begin{cases} 4x_1 + x_2 \leq 200, \\ 5x_1 + 2x_2 + 3x_3 \geq 120, \\ x_1 + x_3 = 20, \end{cases} \quad \begin{cases} x_2 + 2x_3 \leq 300, \\ 2x_1 + x_2 \geq 100, \\ x_1 - 2x_3 = 10, \end{cases}$$

$$x_j \geq 0, j = \overline{1,3}; \quad x_j \geq 0, j = \overline{1,3};$$

$$19. \quad Z = 3x_1 + 5x_2 + x_3 \quad (\max), \quad 20. \quad Z = 12x_1 + 5x_2 + x_3 \quad (\max),$$

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 \leq 280, \\ 3x_1 + 2x_2 \geq 100, \\ x_1 + x_3 = 100, \end{cases} \quad \begin{cases} x_1 + 4x_2 \leq 200, \\ 2x_1 + 6x_2 + 2x_3 \geq 50, \\ 3x_2 + 6x_3 = 180, \end{cases}$$

$$x_j \geq 0, j = \overline{1,3}; \quad x_j \geq 0, j = \overline{1,3};$$

$$21. \quad Z = 20x_1 + 6x_2 + 6x_3 \quad (\max), \quad 22. \quad Z = 2x_1 + 7x_2 + 4x_3 \quad (\max),$$

$$\begin{cases} 6x_1 + 3x_2 + 2x_3 \leq 320, \\ 5x_2 + 8x_3 \geq 200, \\ 6x_1 + x_2 = 120, \\ x_j \geq 0, j = \overline{1,3}; \end{cases}$$

$$\begin{cases} x_2 + 2x_3 \leq 100, \\ 3x_1 + 4x_2 + 5x_3 \geq 120, \\ x_1 + x_3 = 20, \\ x_j \geq 0, j = \overline{1,3}; \end{cases}$$

$$23. \quad Z = 15x_1 + 10x_2 + 3x_3 \quad (\max), \quad 24. \quad Z = 3x_1 + 10x_2 + 3x_3 \quad (\max),$$

$$\begin{cases} 5x_1 + 3x_3 \leq 600, \\ 4x_2 + 3x_3 \geq 200, \\ -10x_1 + 2x_2 = 20, \\ x_j \geq 0, j = \overline{1,3}; \end{cases}$$

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 + 3x_3 \leq 140, \\ 3x_1 + 4x_2 + x_3 \geq 200, \\ x_1 + 3x_3 = 200, \\ x_j \geq 0, j = \overline{1,3}; \end{cases}$$

$$25. \quad Z = 3x_1 + 2x_2 + 2x_3 \quad (\max), \quad 26. \quad Z = 4x_1 + 2x_2 + 3x_3 \quad (\max),$$

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 = 300, \\ 2x_1 + x_2 + 2x_3 \leq 50, \\ x_2 - x_3 \geq 10, \\ x_j \geq 0, j = \overline{1,3}; \end{cases}$$

$$\begin{cases} 2x_1 + x_3 = 20, \\ x_1 + 2x_2 + 2x_3 \leq 62, \\ 2x_1 + x_2 + 3x_3 \geq 66, \\ x_j \geq 0, j = \overline{1,3}; \end{cases}$$

$$27. \quad Z = 3x_1 + 7x_2 + 5x_3 \quad (\max), \quad 28. \quad Z = 5x_1 + 6x_2 + 3x_3 \quad (\max),$$

$$\begin{cases} x_2 + x_3 = 20, \\ x_1 + 3x_2 + 3x_3 \leq 66, \\ 3x_1 + 4x_2 + 3x_3 \geq 89, \\ x_j \geq 0, j = \overline{1,3}; \end{cases}$$

$$\begin{cases} 2x_1 + x_2 = 15, \\ x_1 + 3x_2 + 4x_3 \leq 75, \\ x_1 + 4x_2 + 4x_3 \geq 80, \\ x_j \geq 0, j = \overline{1,3}; \end{cases}$$

$$29. \quad Z = 5x_1 + 2x_2 + x_3 \quad (\max), \quad 30. \quad Z = 3x_1 + 8x_2 + 6x_3 \quad (\max),$$

$$\begin{cases} 3x_1 + 4x_2 + 2x_3 = 48, \\ x_1 + 2x_2 + 3x_3 \leq 60, \\ x_2 + 2x_3 \geq 10, \\ x_j \geq 0, j = \overline{1,3}; \end{cases}$$

$$\begin{cases} 3x_1 + 4x_2 + 2x_3 = 230, \\ 2x_1 + x_2 + 4x_3 \geq 170, \\ x_1 + 2x_2 + 6x_3 \leq 230, \\ x_j \geq 0, j = \overline{1,3}. \end{cases}$$

### **Рекомендуемая литература**

1. Математика для экономических специальностей вузов. Ч.3 / Под ред. Р.Ш. Марданова.- Казань: Изд-во КГУ, 2007, с. 171-182.
2. Сборник задач по математике для экономистов: учебное пособие для экономических специальностей вузов./ Р. Ш. Марданов, А. Ю. Хасанова, Р. А. Султанов, А. Г. Фатыхов; под научной редакцией проф. Р. Ш. Марданова.- Казань: Казан. Гос. Ун.-т, 2009, с.415-420.

### **Работа № 6**

#### **Тема 15. Двойственность в линейном программировании**

Задания:

1. Решить задачу методом искусственного базиса. Используя первую теорему двойственности, записать оптимальные планы исходной и двойственной задач.
2. Решить двойственную задачу графическим методом. Используя вторую теорему двойственности, найти решение исходной задачи.

Варианты заданий:

- |  |   |
|--|---|
| 1. $Z = 21x_1 + 4x_2 + 2x_3 \quad (\min),$<br>$\begin{cases} 3x_1 + x_2 - x_3 \geq 1, \\ 4x_1 - 2x_2 + x_3 \geq 1, \\ x_j \geq 0, \quad j = \overline{1,3}. \end{cases}$ | 2. $Z = 26x_1 + 8x_2 + 2x_3 \quad (\min),$<br>$\begin{cases} 3x_1 - x_2 + x_3 \geq 1, \\ 4x_1 + 2x_2 - 2x_3 \geq 2, \\ x_j \geq 0, \quad j = \overline{1,3}. \end{cases}$ |
| 3. $Z = 18x_1 + 10x_2 + x_3 \quad (\min),$<br>$\begin{cases} 3x_1 - x_2 + x_3 \geq 2, \\ 2x_1 + 2x_2 - x_3 \geq 1, \\ x_j \geq 0, \quad j = \overline{1,3}. \end{cases}$ | 4. $Z = 9x_1 + x_2 + 12x_3 \quad (\min),$<br>$\begin{cases} x_1 - 3x_2 + 2x_3 \geq 2, \\ 2x_1 + x_2 + x_3 \geq 3, \\ x_j \geq 0, \quad j = \overline{1,3}. \end{cases}$   |

$$\begin{aligned}
5. \quad & Z = 28x_1 + 2x_2 + 6x_3 \quad (\min), \\
& \begin{cases} 3x_1 - 3x_2 + 2x_3 \geq 3, \\ 5x_1 + x_2 - 3x_3 \geq 2, \end{cases} \\
& x_j \geq 0, \quad j = \overline{1,3}.
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
6. \quad & Z = 6x_1 + 2x_2 + 12x_3 \quad (\min), \\
& \begin{cases} x_1 - 3x_2 + 3x_3 \geq 3, \\ x_1 + 2x_2 + x_3 \geq 4, \end{cases} \\
& x_j \geq 0, \quad j = \overline{1,3}.
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
7. \quad & Z = 9x_1 + 2x_2 + 8x_3 \quad (\min), \\
& \begin{cases} -2x_1 + x_2 + x_3 \geq 1, \\ 3x_1 - 2x_2 + x_3 \geq 1, \end{cases} \\
& x_j \geq 0, \quad j = \overline{1,3}.
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
8. \quad & Z = 10x_1 + 5x_2 + 3x_3 \quad (\min), \\
& \begin{cases} x_1 + x_2 - x_3 \geq 2, \\ x_1 - x_2 + x_3 \geq 1, \end{cases} \\
& x_j \geq 0, \quad j = \overline{1,3}.
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
9. \quad & Z = 6x_1 + 5x_2 + 6x_3 \quad (\min), \\
& \begin{cases} x_1 - 4x_2 + 2x_3 \geq 3, \\ x_1 + x_2 - x_3 \geq 1, \end{cases} \\
& x_j \geq 0, \quad j = \overline{1,3}.
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
10. \quad & Z = 8x_1 + 4x_2 + 10x_3 \quad (\min), \\
& \begin{cases} x_1 - 3x_2 + 2x_3 \geq 1, \\ x_1 + x_2 - x_3 \geq 2, \end{cases} \\
& x_j \geq 0, \quad j = \overline{1,3}.
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
11. \quad & Z = 8x_1 + 6x_2 + 2x_3 \quad (\min), \\
& \begin{cases} x_1 - 3x_2 + x_3 \geq 1, \\ x_1 + 2x_2 - x_3 \geq 3, \end{cases} \\
& x_j \geq 0, \quad j = \overline{1,3}.
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
12. \quad & Z = 10x_1 + 10x_2 + 8x_3 \quad (\min), \\
& \begin{cases} x_1 + 2x_2 - x_3 \geq 2, \\ x_1 - 3x_2 + x_3 \geq 3, \end{cases} \\
& x_j \geq 0, \quad j = \overline{1,3}.
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
13. \quad & Z = 10x_1 + 10x_2 + 8x_3 \quad (\min), \\
& \begin{cases} -3x_1 + 3x_2 + x_3 \geq 3, \\ x_1 - x_2 + x_3 \geq 1, \end{cases} \\
& x_j \geq 0, \quad j = \overline{1,3}.
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
14. \quad & Z = 9x_1 + 6x_2 + 14x_3 \quad (\min), \\
& \begin{cases} x_1 - 2x_2 + 2x_3 \geq 3, \\ x_1 + x_2 + x_3 \geq 1, \end{cases} \\
& x_j \geq 0, \quad j = \overline{1,3}.
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
15. \quad & Z = 9x_1 + 24x_2 + 5x_3 \quad (\min), \\
& \begin{cases} x_1 + 2x_2 + x_3 \geq 4, \\ x_1 + 3x_2 - 3x_3 \geq 1, \end{cases} \\
& x_j \geq 0, \quad j = \overline{1,3}.
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
16. \quad & Z = 12x_1 + 6x_2 + 12x_3 \quad (\min), \\
& \begin{cases} x_1 - 2x_2 + 3x_3 \geq 1, \\ x_1 + x_2 - 5x_3 \geq 3, \end{cases} \\
& x_j \geq 0, \quad j = \overline{1,3}.
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
17. \quad & Z = 12x_1 + 20x_2 + 8x_3 \quad (\min), \\
& \begin{cases} x_1 - 3x_2 + x_3 \geq 3, \\ x_1 + 4x_2 - x_3 \geq 1, \end{cases} \\
& x_j \geq 0, \quad j = \overline{1,3}.
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
18. \quad & Z = 11x_1 + 2x_2 + 8x_3 \quad (\min), \\
& \begin{cases} x_1 - 2x_2 + 2x_3 \geq 3, \\ x_1 + x_2 - 5x_3 \geq 2, \end{cases} \\
& x_j \geq 0, \quad j = \overline{1,3}.
\end{aligned}$$

19.  $Z = 11x_1 + 10x_2 + 18x_3$  (min),  

$$\begin{cases} x_1 - x_2 + 3x_3 \geq 2, \\ x_1 + 2x_2 - 2x_3 \geq 3, \\ x_j \geq 0, \quad j = \overline{1,3}. \end{cases}$$
20.  $Z = 8x_1 + 3x_2 + 10x_3$  (min),  

$$\begin{cases} x_1 - 4x_2 + 2x_3 \geq 4, \\ x_1 + x_2 - x_3 \geq 1, \\ x_j \geq 0, \quad j = \overline{1,3}. \end{cases}$$
21.  $Z = 4x_1 + 4x_2 + 8x_3$  (min),  

$$\begin{cases} x_1 - x_2 + x_3 \geq 2, \\ -3x_1 + x_2 + x_3 \geq 3, \\ x_j \geq 0, \quad j = \overline{1,3}. \end{cases}$$
22.  $Z = 5x_1 + 30x_2 + 4x_3$  (min),  

$$\begin{cases} x_1 + 3x_2 + x_3 \geq 1, \\ x_1 + 10x_2 - x_3 \geq 2, \\ x_j \geq 0, \quad j = \overline{1,3}. \end{cases}$$
23.  $Z = 30x_1 + 5x_2 + 3x_3$  (min),  

$$\begin{cases} 3x_1 + x_2 + x_3 \geq 3, \\ 10x_1 + x_2 - x_3 \geq 1, \\ x_j \geq 0, \quad j = \overline{1,3}. \end{cases}$$
24.  $Z = 7x_1 + 15x_2 + 5x_3$  (min),  

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 \geq 2, \\ x_1 + 3x_2 - x_3 \geq 3, \\ x_j \geq 0, \quad j = \overline{1,3}. \end{cases}$$
25.  $Z = 18x_1 + 4x_2 + 7x_3$  (min),  

$$\begin{cases} 2x_1 + x_2 + x_3 \geq 3, \\ 3x_1 - x_2 + x_3 \geq 2, \\ x_j \geq 0, \quad j = \overline{1,3}. \end{cases}$$
26.  $Z = 4x_1 + 3x_2 + 4x_3$  (min),  

$$\begin{cases} x_1 - x_2 + x_3 \geq 2, \\ -4x_1 + 3x_2 + 2x_3 \geq 5, \\ x_j \geq 0, \quad j = \overline{1,3}. \end{cases}$$
27.  $Z = 3x_1 + 4x_2 + 6x_3$  (min),  

$$\begin{cases} 3x_1 - 4x_2 + 3x_3 \geq 3, \\ -x_1 + x_2 + 2x_3 \geq 1, \\ x_j \geq 0, \quad j = \overline{1,3}. \end{cases}$$
28.  $Z = 7x_1 + 5x_2 + 9x_3$  (min),  

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 \geq 2, \\ 3x_1 + x_2 + 4x_3 \geq 6, \\ x_j \geq 0, \quad j = \overline{1,3}. \end{cases}$$
29.  $Z = 3x_1 + 2x_2 + 6x_3$  (min),  

$$\begin{cases} x_1 - 2x_2 + 3x_3 \geq 2, \\ -3x_1 + x_2 + 2x_3 \geq 5, \\ x_j \geq 0, \quad j = \overline{1,3}. \end{cases}$$
30.  $Z = 4x_1 + 2x_2 + 2x_3$  (min),  

$$\begin{cases} 2x_1 - x_2 + 2x_3 \geq 1, \\ x_1 + x_2 - x_3 \geq 3, \\ x_j \geq 0, \quad j = \overline{1,3}. \end{cases}$$

### **Рекомендуемая литература**

1. Математика для экономических специальностей вузов. Ч.3 / Под ред. Р.Ш. Марданова.- Казань: Изд-во КГУ, 2007, с. 182-198.
2. Сборник задач по математике для экономистов: учебное пособие для экономических специальностей вузов./ Р. Ш. Марданов, А. Ю. Хасанова, Р.



А. Султанов, А. Г. Фатыхов; под научной редакцией проф. Р. Ш. Марданова.-  
Казань: Казан. Гос. Ун.-т, 2009, с.420-429.

## Работа № 7

### Тема 17. Транспортные задачи линейного программирования

Задача. Имеются 4 пункта отправления некоторого однородного груза  $A_1, A_2, A_3, A_4$  в 4 пункта  $B_1, B_2, B_3, B_4$  потребления этого груза. В пунктах  $A_1, A_2, A_3, A_4$  находится груз соответственно в количествах  $a_1, a_2, a_3, a_4$  тонн. В пункты потребления  $B_1, B_2, B_3, B_4$  требуется доставить соответственно  $b_1, b_2, b_3, b_4$  тонн груза. Дана матрица тарифов перевозок  $C = (c_{ij})$  1 тонны груза из  $i$ -го пункта отправления в  $j$ -й пункт потребления ( $i, j = \overline{1,4}$ ).

Задания:

1. Составить экономико-математическую модель задачи.
2. Определить план закрепления потребителей за поставщиками груза, минимизирующий суммарные транспортные расходы.
3. Найти оптимальный план перевозок по данным задачи при дополнительном условии: из  $i$ -го пункта отправления ( $i = \overline{1,4}$ ) груз должен быть вывезен полностью ( в случае  $\sum_{i=1}^4 a_i > \sum_{j=1}^4 b_j$  ) или  $j$ -й пункт потребления должен быть удовлетворен полностью (в случае  $\sum_{i=1}^4 a_i < \sum_{j=1}^4 b_j$  ).

Варианты заданий:

$$1. \begin{array}{ll} a_1 = 100, & b_1 = 150, \\ a_2 = 120, & b_2 = 130, \\ a_3 = 140, & b_3 = 130, \\ a_4 = 100, & b_4 = 160, \end{array} \quad C = \begin{pmatrix} 6 & 7 & 3 & 5 \\ 4 & 5 & 3 & 6 \\ 8 & 4 & 5 & 4 \\ 2 & 4 & 5 & 8 \end{pmatrix}, \quad j = 4.$$

$$2. \quad \begin{array}{ll} a_1 = 120, & b_1 = 80, \\ a_2 = 110, & b_2 = 100, \\ a_3 = 90, & b_3 = 120, \\ a_4 = 200, & b_4 = 150, \end{array} \quad C = \begin{pmatrix} 6 & 5 & 4 & 3 \\ 3 & 7 & 6 & 5 \\ 4 & 6 & 3 & 4 \\ 3 & 6 & 4 & 2 \end{pmatrix}, \quad i = 3.$$

$$3. \quad \begin{array}{ll} a_1 = 75, & b_1 = 110, \\ a_2 = 85, & b_2 = 95, \\ a_3 = 100, & b_3 = 45, \\ a_4 = 120, & b_4 = 80, \end{array} \quad C = \begin{pmatrix} 3 & 5 & 4 & 2 \\ 4 & 4 & 3 & 5 \\ 8 & 7 & 6 & 9 \\ 5 & 3 & 2 & 4 \end{pmatrix}, \quad i = 3.$$

$$4. \quad \begin{array}{ll} a_1 = 80, & b_1 = 100, \\ a_2 = 70, & b_2 = 55, \\ a_3 = 45, & b_3 = 90, \\ a_4 = 65, & b_4 = 75, \end{array} \quad C = \begin{pmatrix} 3 & 4 & 5 & 3 \\ 8 & 7 & 6 & 5 \\ 6 & 5 & 4 & 3 \\ 5 & 3 & 2 & 4 \end{pmatrix}, \quad j = 2.$$

$$5. \quad \begin{array}{ll} a_1 = 110, & b_1 = 100, \\ a_2 = 95, & b_2 = 120, \\ a_3 = 105, & b_3 = 130, \\ a_4 = 90, & b_4 = 120, \end{array} \quad C = \begin{pmatrix} 5 & 5 & 6 & 6 \\ 4 & 4 & 7 & 5 \\ 2 & 3 & 6 & 3 \\ 5 & 2 & 8 & 4 \end{pmatrix}, \quad j = 3.$$

$$6. \quad \begin{array}{ll} a_1 = 105, & b_1 = 70, \\ a_2 = 115, & b_2 = 130, \\ a_3 = 110, & b_3 = 120, \\ a_4 = 90, & b_4 = 150, \end{array} \quad C = \begin{pmatrix} 6 & 3 & 3 & 5 \\ 5 & 4 & 1 & 3 \\ 7 & 2 & 3 & 2 \\ 6 & 3 & 4 & 2 \end{pmatrix}, \quad j = 1.$$

$$7. \quad \begin{array}{ll} a_1 = 55, & b_1 = 80, \\ a_2 = 115, & b_2 = 90, \\ a_3 = 155, & b_3 = 150, \\ a_4 = 125, & b_4 = 100, \end{array} \quad C = \begin{pmatrix} 2 & 4 & 5 & 5 \\ 4 & 3 & 2 & 1 \\ 2 & 4 & 5 & 3 \\ 6 & 6 & 5 & 8 \end{pmatrix}, \quad i = 4.$$

$$8. \quad \begin{array}{ll} a_1 = 105, & b_1 = 90, \\ a_2 = 75, & b_2 = 90, \\ a_3 = 120, & b_3 = 100, \\ a_4 = 160, & b_4 = 100, \end{array} \quad C = \begin{pmatrix} 4 & 6 & 8 & 6 \\ 5 & 4 & 3 & 2 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \\ 3 & 3 & 5 & 5 \end{pmatrix}, \quad i = 1.$$

$$9. \quad \begin{array}{ll} a_1 = 95, & b_1 = 100, \\ a_2 = 105, & b_2 = 100, \\ a_3 = 120, & b_3 = 130, \\ a_4 = 80, & b_4 = 120, \end{array} \quad C = \begin{pmatrix} 4 & 5 & 3 & 6 \\ 5 & 4 & 4 & 2 \\ 2 & 1 & 4 & 3 \\ 6 & 5 & 7 & 5 \end{pmatrix}, \quad j = 3.$$

$$10. \quad \begin{array}{ll} a_1 = 115, & b_1 = 100, \\ a_2 = 85, & b_2 = 100, \\ a_3 = 110, & b_3 = 75, \\ a_4 = 90, & b_4 = 75, \end{array} \quad C = \begin{pmatrix} 4 & 4 & 3 & 5 \\ 2 & 3 & 4 & 5 \\ 6 & 5 & 6 & 7 \\ 4 & 4 & 2 & 1 \end{pmatrix}, \quad i = 3.$$

$$11. \quad \begin{array}{ll} a_1 = 120, & b_1 = 125, \\ a_2 = 130, & b_2 = 125, \\ a_3 = 100, & b_3 = 150, \\ a_4 = 100, & b_4 = 140, \end{array} \quad C = \begin{pmatrix} 4 & 6 & 5 & 2 \\ 3 & 7 & 4 & 3 \\ 5 & 8 & 3 & 4 \\ 2 & 5 & 4 & 5 \end{pmatrix}, \quad j = 2.$$

$$12. \quad \begin{array}{ll} a_1 = 90, & b_1 = 100, \\ a_2 = 125, & b_2 = 115, \\ a_3 = 125, & b_3 = 150, \\ a_4 = 100, & b_4 = 145, \end{array} \quad C = \begin{pmatrix} 1 & 5 & 3 & 8 \\ 2 & 4 & 4 & 7 \\ 3 & 3 & 5 & 6 \\ 4 & 2 & 6 & 5 \end{pmatrix}, \quad j = 4.$$

$$13. \quad \begin{array}{ll} a_1 = 80, & b_1 = 90, \\ a_2 = 125, & b_2 = 90, \\ a_3 = 95, & b_3 = 75, \\ a_4 = 100, & b_4 = 75, \end{array} \quad C = \begin{pmatrix} 4 & 6 & 2 & 3 \\ 3 & 5 & 3 & 3 \\ 2 & 6 & 4 & 5 \\ 1 & 5 & 5 & 4 \end{pmatrix}, \quad i = 3.$$

$$14. \quad \begin{array}{ll} a_1 = 100, & b_1 = 90, \\ a_2 = 100, & b_2 = 110, \\ a_3 = 120, & b_3 = 110, \\ a_4 = 180, & b_4 = 110, \end{array} \quad C = \begin{pmatrix} 5 & 6 & 2 & 1 \\ 4 & 7 & 8 & 6 \\ 3 & 5 & 4 & 2 \\ 2 & 6 & 1 & 3 \end{pmatrix}, \quad i = 2.$$

$$15. \quad \begin{array}{ll} a_1 = 80, & b_1 = 90, \\ a_2 = 125, & b_2 = 110, \\ a_3 = 135, & b_3 = 160, \\ a_4 = 110, & b_4 = 160, \end{array} \quad C = \begin{pmatrix} 6 & 4 & 3 & 2 \\ 6 & 5 & 4 & 3 \\ 5 & 3 & 5 & 4 \\ 7 & 4 & 4 & 5 \end{pmatrix}, \quad j = 1.$$

$$16. \quad \begin{array}{ll} a_1 = 125, & b_1 = 120, \\ a_2 = 125, & b_2 = 130, \\ a_3 = 150, & b_3 = 200, \\ a_4 = 150, & b_4 = 200, \end{array} \quad C = \begin{pmatrix} 5 & 7 & 6 & 4 \\ 4 & 6 & 5 & 3 \\ 4 & 5 & 4 & 6 \\ 3 & 8 & 2 & 4 \end{pmatrix}, \quad j = 2.$$

$$17. \quad \begin{array}{ll} a_1 = 110, & b_1 = 75, \\ a_2 = 120, & b_2 = 115, \\ a_3 = 130, & b_3 = 100, \\ a_4 = 140, & b_4 = 150, \end{array} \quad C = \begin{pmatrix} 5 & 6 & 7 & 4 \\ 6 & 7 & 8 & 9 \\ 4 & 5 & 6 & 3 \\ 4 & 3 & 5 & 6 \end{pmatrix}, \quad i = 2$$

$$18. \quad \begin{array}{ll} a_1 = 75, & b_1 = 100, \\ a_2 = 100, & b_2 = 100, \\ a_3 = 125, & b_3 = 90, \\ a_4 = 150, & b_4 = 70, \end{array} \quad C = \begin{pmatrix} 6 & 3 & 5 & 6 \\ 5 & 4 & 4 & 6 \\ 9 & 8 & 8 & 8 \\ 7 & 6 & 5 & 4 \end{pmatrix}, \quad i = 3.$$

$$19. \quad \begin{array}{ll} a_1 = 55, & b_1 = 80, \\ a_2 = 65, & b_2 = 70, \\ a_3 = 95, & b_3 = 100, \\ a_4 = 75, & b_4 = 100, \end{array} \quad C = \begin{pmatrix} 6 & 5 & 4 & 7 \\ 5 & 4 & 3 & 2 \\ 3 & 4 & 5 & 6 \\ 4 & 3 & 4 & 7 \end{pmatrix}, \quad j = 3.$$

$$20. \quad \begin{array}{ll} a_1 = 75, & b_1 = 90, \\ a_2 = 95, & b_2 = 100, \\ a_3 = 100, & b_3 = 150, \\ a_4 = 90, & b_4 = 80, \end{array} \quad C = \begin{pmatrix} 2 & 5 & 4 & 6 \\ 3 & 4 & 3 & 5 \\ 4 & 3 & 4 & 7 \\ 5 & 3 & 5 & 7 \end{pmatrix}, \quad j = 4.$$

$$21. \quad \begin{array}{ll} a_1 = 70, & b_1 = 100, \\ a_2 = 80, & b_2 = 100, \\ a_3 = 100, & b_3 = 90, \\ a_4 = 120, & b_4 = 140, \end{array} \quad C = \begin{pmatrix} 5 & 6 & 4 & 2 \\ 6 & 7 & 3 & 3 \\ 4 & 8 & 5 & 4 \\ 3 & 6 & 8 & 5 \end{pmatrix}, \quad j = 2.$$

$$22. \quad \begin{array}{ll} a_1 = 80, & b_1 = 110, \\ a_2 = 105, & b_2 = 130, \\ a_3 = 125, & b_3 = 160, \\ a_4 = 90, & b_4 = 120, \end{array} \quad C = \begin{pmatrix} 6 & 6 & 3 & 5 \\ 5 & 4 & 4 & 3 \\ 6 & 5 & 6 & 4 \\ 8 & 4 & 2 & 4 \end{pmatrix}, \quad j = 1.$$

$$\begin{array}{ll}
a_1 = 100, & b_1 = 80, \\
a_2 = 120, & b_2 = 90, \\
a_3 = 90, & b_3 = 100, \\
a_4 = 90, & b_4 = 80,
\end{array}
\quad C = \begin{pmatrix} 5 & 4 & 3 & 2 \\ 6 & 5 & 7 & 6 \\ 2 & 3 & 4 & 5 \\ 5 & 4 & 6 & 5 \end{pmatrix}, \quad i = 2.$$

$$\begin{array}{ll}
a_1 = 95, & b_1 = 90, \\
a_2 = 105, & b_2 = 85, \\
a_3 = 100, & b_3 = 90, \\
a_4 = 110, & b_4 = 80,
\end{array}
\quad C = \begin{pmatrix} 4 & 2 & 3 & 5 \\ 3 & 6 & 6 & 6 \\ 4 & 6 & 8 & 3 \\ 6 & 5 & 7 & 6 \end{pmatrix}, \quad i = 4.$$

$$\begin{array}{ll}
a_1 = 110, & b_1 = 85, \\
a_2 = 100, & b_2 = 105, \\
a_3 = 160, & b_3 = 120, \\
a_4 = 80, & b_4 = 85,
\end{array}
\quad C = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 6 & 4 \\ 6 & 4 & 3 & 5 \\ 8 & 6 & 4 & 6 \\ 3 & 4 & 2 & 6 \end{pmatrix}, \quad j = 3.$$

$$\begin{array}{ll}
a_1 = 100, & b_1 = 150, \\
a_2 = 110, & b_2 = 140, \\
a_3 = 120, & b_3 = 120, \\
a_4 = 130, & b_4 = 90,
\end{array}
\quad C = \begin{pmatrix} 1 & 5 & 3 & 4 \\ 2 & 5 & 1 & 3 \\ 6 & 7 & 3 & 7 \\ 4 & 8 & 5 & 3 \end{pmatrix}, \quad j = 2.$$

$$\begin{array}{ll}
a_1 = 40, & b_1 = 50, \\
a_2 = 60, & b_2 = 40, \\
a_3 = 80, & b_3 = 70, \\
a_4 = 100, & b_4 = 90,
\end{array}
\quad C = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 1 & 3 \\ 7 & 1 & 4 & 2 \\ 4 & 5 & 3 & 4 \\ 2 & 2 & 6 & 4 \end{pmatrix}, \quad i = 4.$$

$$\begin{array}{ll}
a_1 = 55, & b_1 = 80, \\
a_2 = 115, & b_2 = 90, \\
a_3 = 155, & b_3 = 150, \\
a_4 = 125, & b_4 = 100,
\end{array}
\quad C = \begin{pmatrix} 2 & 4 & 5 & 5 \\ 4 & 3 & 2 & 1 \\ 2 & 4 & 5 & 3 \\ 6 & 6 & 5 & 8 \end{pmatrix}, \quad i = 4.$$

$$\begin{array}{ll}
a_1 = 75, & b_1 = 100, \\
a_2 = 100, & b_2 = 100, \\
a_3 = 95, & b_3 = 90, \\
a_4 = 150, & b_4 = 70,
\end{array}
\quad C = \begin{pmatrix} 6 & 3 & 5 & 6 \\ 5 & 4 & 4 & 6 \\ 9 & 8 & 8 & 7 \\ 7 & 6 & 5 & 4 \end{pmatrix}, \quad i = 3.$$

$$30. \quad \begin{array}{ll} a_1 = 105, & b_1 = 70, \\ a_2 = 115, & b_2 = 130, \\ a_3 = 110, & b_3 = 120, \\ a_4 = 90, & b_4 = 150, \end{array} \quad C = \begin{pmatrix} 6 & 3 & 4 & 5 \\ 5 & 4 & 1 & 3 \\ 7 & 2 & 3 & 2 \\ 6 & 3 & 4 & 2 \end{pmatrix}, \quad j = 1.$$

### **Рекомендуемая литература**

1. Математика для экономических специальностей вузов. Ч.3 / Под ред. Р.Ш. Марданова.- Казань: Изд-во КГУ, 2007, с.222-259.
2. Сборник задач по математике для экономистов: учебное пособие для экономических специальностей вузов./ Р. Ш. Марданов, А. Ю. Хасанова, Р. А. Султанов, А. Г. Фатыхов; под научной редакцией проф. Р. Ш. Марданова.- Казань: Казан. Гос. Ун.-т, 2009, с.429-449.

### **Работа № 8**

#### **Тема 19. Сетевое планирование управления**

Задания:

1. Построить сетевой график.
2. Пронумеровать события.
3. Рассчитать временные параметры и критический путь. Исходные данные задания для каждого варианта приводятся в таблицах.

#### **Некоторые правила построения сетевого графика.**

1. Построение сетевого графика начинается с начального события (т.е. события, которое не имеет входящих работ).
2. Определяются работы, которые выходят из начального события. Номера этих работ не могут находиться в строке 2.
3. Если после некоторых работ выполняется одна и та же работа, то эти работы заканчиваются в одном событии.

4. Если после каких-то работ не выполняется ни одна работа, то эти работы входят в конечное событие.

Остальные правила построения сетевого графика, метод ранжирования событий (метод нумерации событий), алгоритм расчета временных параметров и критического пути изложены в учебном пособии [1].

Рассмотрим построение сетевого графика по данным таблицы:

1	Перечень работ	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14
2	Посл. вып.	3,4	5,6	7,8	9	9	10,11	14	13	13	13	12	—	—	—
3	$t$	3	1	2	5	4	7	6	2	8	3	6	4	9	8

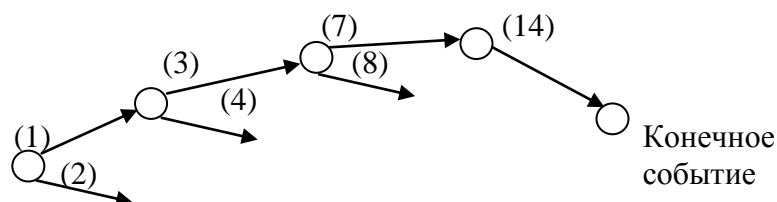
В строке 1 дается перечень работ проекта, которым соответствуют номера по порядку.

В строке 2 указаны номера работ, непосредственно выполняющихся после соответствующей работы в строке 1.

В строке 3 приведены продолжительности  $t$  работ проекта.

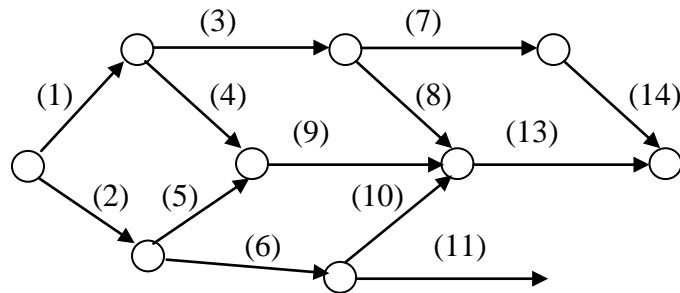
Работ 1 и 2 нет в строке 2, следовательно, они выходят из начального события.

После работы 1 выполняются работы 3 и 4. Проследим одну цепочку. После работы 3 выполняются работы 7, 8. После работы 7 выполняется работа 14, которая заканчивается в конечном событии.

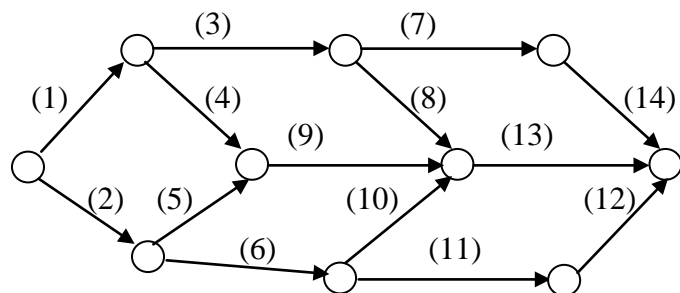


Затем строим другую цепочку. После работы 4 выполняется работа 9, после работ 8 и 9 – работа 13, которая заканчивается в конечном событии. Работы 8 и 9 входят в одно событие.

После работы 2 выполняются работы 5 и 6. После работы 5 выполняется работа 9, она выполняется и после работы 4, следовательно, работы 4 и 5 входят в одно событие. После работы 6 выполняются работы 10 и 11, после работы 10 выполняется работа 13 и она же выполнялась после работ 8 и 9, следовательно, работы 8, 9 10 входят в одно событие:



После работы 11 выполняется работа 12, которая заканчивается в конечном событии.



Таким образом, сетевой график построен. Нумерация событий сетевого графика производится методом ранжирования событий.

#### Варианты заданий:

1.

1	Перечень работ	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14
2	Посл. вып.	3,4	5	9,10	6,8	7	7	11	11	11	14	12,13	14	—	—
3	$t$	5	3	2	6	8	10	3	7	5	2	9	7	5	6



2.

1	Перечень работ	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14
2	Посл. вып.	5,6	4,7	8	8	4,7	9,11	12	10,13	12	12	—	—	14	—
3	$t$	4	2	5	7	3	8	6	2	3	6	2	5	8	6

3.

1	Перечень работ	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14
2	Посл. вып.	4	5,6	7	8,9,10	8,9,10	7	11	13	—	11	12	—	14	—
3	$t$	2	5	2	1	4	8	10	3	5	6	7	6	4	5

4.

1	Перечень работ	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14
2	Посл. вып.	4	5,6,7	8	9,10	9	11	12,13	12,13	—	11	—	—	14	—
3	$t$	2	5	7	1	3	4	5	7	2	3	6	8	5	2

5.

1	Перечень работ	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15
2	Посл. вып.	3,4	5,6	10	8,9	8,9	7	11 13	11 13	12 14	12 14	12 14	15	—	—	—
3	$t$	5	4	3	2	1	5	6	6	8	7	3	5	4	6	2

6.

1	Перечень работ	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14
2	Посл. вып.	5,7	6,8	4	10,11	6,8	10,11	9,14	9,14	13	13	12	—	—	—
3	$t$	7	3	4	6	2	3	5	1	7	8	3	6	5	3

7.

1	Перечень работ	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15
2	Посл. вып.	4,7	6,8	5	6,8	9,10	9,10	11 12	13 14	13 14	15	—	13 14	15	—	—
3	$t$	5	2	6	4	3	7	1	3	5	8	7	3	4	2	6

8.

1	Перечень работ	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13
2	Посл. вып.	5	4,8	7	7	6,9	4,8	11,12	10	10	13	13	—	—
3	$t$	4	3	2	1	5	8	7	3	4	5	2	6	3

9.

1	Перечень работ	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14
2	Посл. вып.	4	3,5	7,8	7,8	6,9	10,11	10,11	12	14	14	13	13	—	—
3	$t$	3	5	7	8	2	1	6	4	3	7	2	5	4	6

10.

1	Перечень работ	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14
2	Посл. вып.	3	4,5,6	10	10	8,9	7	12	12	11,14	11,14	13	13	—	—
3	$t$	6	3	5	7	4	2	6	5	3	4	8	9	10	5

11.

1	Перечень работ	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14
2	Посл. вып.	8	5,6,7	4	12	12	10,11	9	9	13	—	14	14	—	—
3	$t$	3	4	5	7	2	6	5	8	6	3	7	4	2	3

12.

1	Перечень работ	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13
2	Посл. вып.	5	4,8	7	7	6,9	4,8	11,12	10	10	13	13	—	—
3	$t$	4	3	2	1	5	8	7	3	4	5	2	6	3

13.

1	Перечень работ	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14
2	Посл. вып.	3,4	5,6	7,8	9	9	10,11	14	13	13	13	12	—	—	—
3	$t$	3	1	2	5	4	7	6	2	8	1	4	9	2	6

14.

1	Перечень работ	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14
2	Посл. вып.	4	6,7	5,8	6,7	6,7	10,11	12	9,13	12	12	—	—	14	—
3	$t$	8	3	2	6	4	5	3	4	2	7	3	5	6	5

15.

1	Перечень работ	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15
2	Посл. вып.	3,4	5,6	7	5,6	10 11	8	10 11	9,12	10,11	15	13	14	—	15	—
3	$t$	7	3	2	4	6	7	1	5	8	4	3	5	7	1	3

16.

1	Перечень работ	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13
2	Посл. вып.	3,4	5,8	7	6,9,10	6,9,10	7	11	13	13	11,12	—	13	—
3	$t$	5	3	2	4	6	8	5	7	2	3	8	1	7

17.

1	Перечень работ	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15
2	Посл. вып.	6,7	5	4	5,8	10	10	11	9,12	10	13,14	13,14	15	15	—	—
3	$t$	2	4	3	5	6	7	8	9	10	2	6	5	3	4	2

18.

1	Перечень работ	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15
2	Посл. вып.	4,7	6,8	5	6,8	9,10	9,10	11,12	13 14	13 14	15	—	13 14	15	—	—
3	$t$	3	2	5	4	6	7	1	2	5	6	7	3	5	2	4

19.

1	Перечень работ	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13
2	Посл. вып.	5,6	3,4	5,6	7,10	8	9	8	11,12	—	13	13	—	—
3	$t$	3	4	5	2	7	8	3	4	6	5	3	7	8

20.

1	Перечень работ	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14
2	Посл. вып.	4	6,8	5,7	9,10	6,8	9,10	14	11 12	11 12	13	14	13	—	—
3	$t$	6	3	2	5	4	3	2	8	7	3	5	6	7	2

21.

1	Перечень работ	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14
2	Посл. вып.	4	3,5	7,8	6,9	6,9	10,11	10,11	12	14	14	13	13	—	—
3	$t$	3	5	7	8	2	1	6	4	3	7	2	5	4	6

22.

1	Перечень работ	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14
2	Посл. вып.	4	5,6,7	8	9,10	10	11	12,13	12,13	—	11	—	—	14	—
3	$t$	2	5	7	1	3	4	5	7	2	3	6	8	5	2

23.

1	Перечень работ	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14
2	Посл. вып.	3,4	5,6	7	5,6	10,11	8	10,11	9,12	10,11	15	13	14	—	—
3	$t$	7	3	2	4	6	7	1	5	8	4	3	5	7	1

24.

1	Перечень работ	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14
2	Посл. вып.	2,3	4,5	6,7	10	9	9	8,14	13	13	11,12	13	—	—	—
3	$t$	4	7	5	6	3	2	8	5	7	8	6	3	6	5

25.

1	Перечень работ	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14
2	Посл. вып.	4	5,6,7	8	9,10	10	11	12,13	12,13	—	11	—	—	14	—
3	$t$	2	5	7	1	3	4	5	7	2	3	6	8	5	2

26.

1	Перечень работ	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15
2	Посл. вып.	3,4	5	5	6,7	8,9	15	10	10	11,12	14	14	13	—	—	—
3	$t$	3	7	4	1	8	6	9	2	7	4	3	1	2	5	4

27.

1	Перечень работ	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14
2	Посл. вып.	5 7	6 8	4,6 8	10 11	6 8	10 11	9 14	9 14	13	13	12	—	—	—
3	$t$	7	3	4	6	2	3	5	1	7	8	3	6	5	3

28.

1	Перечень работ	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14
2	Посл. вып.	3,4 5	5	9 10	6 8	7	7	11	11	11	14	12 13	14	—	—
3	$t$	5	3	2	6	8	10	3	7	5	2	9	7	5	6

29.

1	Перечень работ	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13
2	Посл. вып.	5	4 8	7 13	7	6 9	4 8	11 12	10	10	11 12	13	—	—
3	$t$	4	3	2	1	5	8	7	3	4	5	2	6	3

30.

1	Перечень работ	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15
2	Посл. вып.	3,4,5	6,7	6,7	8,9, 10,11	9,15	8,10, 11	12 13	9, 15	10, 11	12, 13	14	14	—	—	—
3	$t$	7	3	5	8	4	6	8	2	10	5	11	3	4	2	6

### **Рекомендуемая литература**

1. Математика для экономических специальностей вузов. Ч.3 / Под ред. Р.Ш. Марданова.- Казань: Изд-во КГУ, 2007, с.300-317.

2. Сборник задач по математике для экономистов: учебное пособие для экономических специальностей вузов./ Р. Ш. Марданов, А. Ю. Хасанова, Р. А. Султанов, А. Г. Фатыхов; под научной редакцией проф. Р. Ш. Марданова.- Казань: Казан. Гос. Ун.-т, 2009, с.452-461.

## Работа № 9

### Тема 20. Динамическое программирование

Задача. Между 4-мя предприятиями распределяются  $x$  млн.руб. Прирост выпуска продукции на этих четырех предприятиях зависит от выделенной суммы. Значения прироста выпуска продукции на предприятиях (I, II, III, IV) приведены в таблице. Определить план распределения средств между предприятиями, максимизирующий общий прирост выпуска продукции.

Варианты заданий:

1.

Выделяемые средства, млн. руб.	Прирост выпуска продукции в млн. руб.			
	I	II	III	IV
25	15	13	18	16
50	28	40	45	38
75	46	68	61	70
100	73	60	81	84

2.

Выделяемые средства, млн. руб.	Прирост выпуска продукции в млн. руб.			
	I	II	III	IV
20	10	13	12	11
40	28	35	33	35
60	42	40	45	47
80	60	62	63	66

3.

Выделяемые средства, млн. руб.	Прирост выпуска продукции в млн. руб.			
	I	II	III	IV
15	10	12	13	12
30	20	19	20	24
45	35	33	32	30
60	45	40	42	44

4.

Выделяемые средства, млн. руб.	Прирост выпуска продукции в млн. руб.			
	I	II	III	IV
30	20	19	22	23
60	32	34	32	35
90	60	55	58	60
120	78	75	77	80

5.

Выделяемые средства, млн. руб.	Прирост выпуска продукции в млн. руб.			
	I	II	III	IV
35	25	22	23	26
70	40	45	44	47
105	75	73	69	74
140	95	97	96	95

6.

Выделяемые средства, млн. руб.	Прирост выпуска продукции в млн. руб.			
	I	II	III	IV
10	8	6	9	6
20	15	16	15	17
30	20	19	22	24
40	32	31	31	33

7.

Выделяемые средства, млн. руб.	Прирост выпуска продукции в млн. руб.			
	I	II	III	IV
13	7	6	9	8
26	16	18	20	19
39	25	26	25	26
52	35	34	36	37

8.

Выделяемые средства, млн. руб.	Прирост выпуска продукции в млн. руб.			
	I	II	III	IV
12	6	9	7	10
24	13	14	13	18
36	26	27	26	24
48	34	33	34	36

9.

Выделяемые средства, млн. руб.	Прирост выпуска продукции в млн. руб.			
	I	II	III	IV
14	10	9	12	11
28	20	24	20	21
42	30	33	32	31
56	40	42	42	41

10.

Выделяемые средства, млн. руб.	Прирост выпуска продукции в млн. руб.			
	I	II	III	IV
16	12	14	10	11
32	25	24	23	30
48	38	41	38	41
64	50	55	53	54

11.

Выделяемые средства, млн. руб.	Прирост выпуска продукции в млн. руб.			
	I	II	III	IV
11	9	8	10	9
22	15	16	14	18
33	23	24	24	25
44	34	31	33	32

12.

Выделяемые средства, млн. руб.	Прирост выпуска продукции в млн. руб.			
	I	II	III	IV
17	15	13	12	14
34	26	27	26	25
51	40	41	43	40
68	57	54	55	54



13.

Выделяемые средства, млн. руб.	Прирост выпуска продукции в млн. руб.			
	I	II	III	IV
40	30	32	34	37
80	60	71	65	70
120	100	98	102	103
160	135	130	136	140

14.

Выделяемые средства, млн. руб.	Прирост выпуска продукции в млн. руб.			
	I	II	III	IV
18	13	15	14	12
36	25	26	27	27
54	38	35	42	44
72	52	50	55	56

15.

Выделяемые средства, млн. руб.	Прирост выпуска продукции в млн. руб.			
	I	II	III	IV
19	14	15	16	13
38	26	28	27	29
57	35	38	44	43
76	52	53	56	58

16.

Выделяемые средства, млн. руб.	Прирост выпуска продукции в млн. руб.			
	I	II	III	IV
21	15	16	17	18
42	30	29	31	32
63	45	43	45	50
84	61	60	62	65

17.

Выделяемые средства, млн. руб.	Прирост выпуска продукции в млн. руб.			
	I	II	III	IV
9	5	6	7	5
18	12	10	11	15
27	17	15	16	20
36	20	21	22	26

18.

Выделяемые средства, млн. руб.	Прирост выпуска продукции в млн. руб.			
	I	II	III	IV
22	15	17	16	18
44	30	31	38	36
66	46	45	50	54
88	65	62	68	71

19.

Выделяемые средства, млн. руб.	Прирост выпуска продукции в млн. руб.			
	I	II	III	IV
8	6	5	6	5
16	10	8	10	13
24	13	12	15	18
32	21	19	20	23

20.

Выделяемые средства, млн. руб.	Прирост выпуска продукции в млн. руб.			
	I	II	III	IV
23	17	16	18	19
46	31	32	39	37
69	47	45	51	55
92	65	63	69	71

21.

Выделяемые средства, млн. руб.	Прирост выпуска продукции в млн. руб.			
	I	II	III	IV
7	4	3	6	4
14	8	9	8	12
21	15	13	16	15
28	17	18	20	20

22.

Выделяемые средства, млн. руб.	Прирост выпуска продукции в млн. руб.			
	I	II	III	IV
24	16	17	18	19
48	31	32	34	41
72	49	50	54	57
96	67	65	70	72

23.

Выделяемые средства, млн. руб.	Прирост выпуска продукции в млн. руб.			
	I	II	III	IV
26	16	20	17	19
52	32	40	40	34
78	52	68	61	57
104	80	82	75	82

24.

Выделяемые средства, млн. руб.	Прирост выпуска продукции в млн. руб.			
	I	II	III	IV
6	4	3	4	5
12	6	8	7	9
18	13	12	14	13
24	16	17	16	17

25.

Выделяемые средства, млн. руб.	Прирост выпуска продукции в млн. руб.			
	I	II	III	IV
27	19	20	19	21
54	40	43	45	46
81	60	61	70	72
108	80	85	84	91

26.

Выделяемые средства, млн. руб.	Прирост выпуска продукции в млн. руб.			
	I	II	III	IV
29	20	21	19	20
58	48	45	50	49
87	72	74	72	71
116	93	92	95	95

27.

Выделяемые средства, млн. руб.	Прирост выпуска продукции в млн. руб.			
	I	II	III	IV
31	21	20	22	21
62	50	49	45	51
93	70	71	70	71
124	90	95	96	98

28.

Выделяемые средства, млн. руб.	Прирост выпуска продукции в млн. руб.			
	I	II	III	IV
28	19	20	18	21
56	35	37	44	40
84	62	60	61	63
112	80	81	81	84

29.

Выделяемые средства, млн. руб.	Прирост выпуска продукции в млн. руб.			
	I	II	III	IV
34	25	23	24	26
68	43	45	47	50
102	70	75	80	75
136	95	98	102	103

30.

Выделяемые средства, млн. руб.	Прирост выпуска продукции в млн. руб.			
	I	II	III	IV
32	22	20	25	19
64	40	41	42	51
96	70	72	65	71
128	97	96	95	96

### ***Рекомендуемая литература***

1. Математика для экономических специальностей вузов. Ч.3 / Под ред. Р.Ш. Марданова.- Казань: Изд-во КГУ, 2007, с. 283- 297.
2. Сборник задач по математике для экономистов: учебное пособие для экономических специальностей вузов./ Р. Ш. Марданов, А. Ю. Хасанова, Р. А. Султанов, А. Г. Фатыхов; под научной редакцией проф. Р. Ш. Марданова.- Казань: Казан. Гос. Ун.-т, 2009, с.461-468.